EPFL

Signaux et Systèmes

Chapitre 10

Fourier discret

Avril 2022

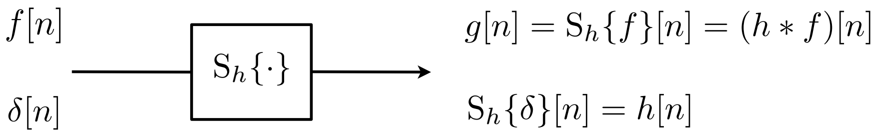
TABLE DES MATIÈRES

10.1 LA DTFT

- Système LID: excitation sinusoidale
- Définition de la DTFT
- Lien avec la transformée en z
- Analogie vecteurs propres/analyse de Fourier
- Lien avec la transformée de Fourier continue
- Propriétés de la DFT

Système LID: excitation sinusoïdale

- Système LID: rappel



$$(h * f)[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] f[n-k]$$

Stabilité BIBO $\quad \Leftrightarrow \quad h \in \ell_1(\mathbb{Z})$

- Excitation sinusoïdale

$$e_{\omega_0}[n] \triangleq \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n} = \cos(\omega_0 n) + \mathrm{j} \sin(\omega_0 n) \quad \text{avec} \quad \omega_0 \in (-\pi, \pi] \text{ (fixé)}$$

$$(h * e_{\omega_0})[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 (n-k)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 k} = \underbrace{\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} h[k] \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 k} \right)}_{H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0}) = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}} e_{\omega_0}[n]$$

NB: $e_{\omega_0} \in \ell_\infty(\mathbb{Z})$ (borné) implique que la convolution est bien définie pour $h \in \ell_1(\mathbb{Z})$

Définition de la DTFT

La ***transformée de Fourier*** à temps discret (discrete-time Fourier transform, DTFT) du signal $f[n]$ est donnée par l'expression

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mathrm{d}}\{f\}(\omega) &= \mathcal{F}\Big\{\sum_{n\in\mathbb{Z}} f[n]\delta(\cdot - n)\Big\}(\omega)\\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} f[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}\end{aligned}$$

Remarques

- Bien qu'elle s'applique à des signaux discrets, la DTFT est une fonction (ou distribution) de la variable réelle ω et est de nature continue.
- La DTFT d'un signal discret est périodique de période 2π. Quand on la trace, on se limite donc toujours à l'intervalle $\omega \in [-\pi, \pi]$.
- La convergence de la somme vers une vraie fonction n'est assurée que si $f \in \ell_1(\mathbb{Z})$; c.-à-d. si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \big|f[n]\big| < \infty$.

Lien avec la transformée en z

Lorsque la transformée en z de $f[n]$ est convergente sur le cercle unité $\{z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} : \omega \in [-\pi, \pi]\}$, on a

$$F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f[n]z^{-n}\Big|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} = \mathcal{F}_{\mathrm{d}}\{f\}(\omega)$$

On utilisera donc systématiquement la notation $F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ pour désigner la DTFT de $f[n]$.

Exemple: si $f[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ alors $\mathcal{F}_{\mathrm{d}}\{f\}(\omega) = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}$.

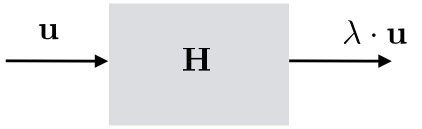
Cependant, la DTFT est plus permissive que la transformée en z.

Exemple: $$f[n] = 1 \xrightarrow{\mathcal{F}_{\mathrm{d}}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} = 2\pi\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(\omega - 2n\pi)\right) \triangleq 2\pi\delta_{\mathrm{perio}}(\omega)$$

alors que la transformée en z de ce signal n'existe que de façon ***formelle***, et pas ***analytique***.

Vecteurs propres

Système linéaire de dimension finie

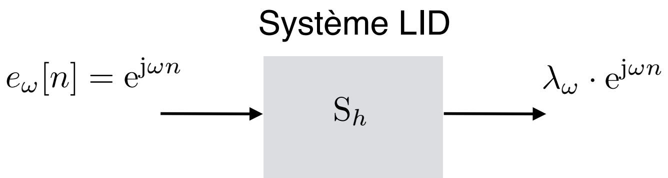


quand $\mathbf{u}$ est un vecteur propre de $\mathbf{H}$

- Opérateur linéaire $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$: $\mathbf{y} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}$
  - Matrice de transformation symétrique: $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{N \times N}$
  - Vecteurs propres: $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N \in \mathbb{R}^N$ avec $\|\mathbf{u}_n\|_2 = 1$ et $\langle \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_m \rangle = \delta_{m-n}$

    $\mathbf{H} \cdot \mathbf{u}_n = \lambda_n \cdot \mathbf{u}_n$ où $\lambda_n \in \mathbb{R}$ (valeurs propres)
  - Matrice des vecteurs propres: $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_N] \in \mathbb{R}^{N \times N}$
  - Diagonalisation: $\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^T$ avec $\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$

Analogie vecteurs propres/analyse de Fourier



où $\lambda_\omega = A(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta(\omega)} \in \mathbb{C}$

- Opérateur LID $f \mapsto h * f : \ell_\infty(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell_\infty(\mathbb{Z}) \quad \Leftrightarrow \quad h \in \ell_1(\mathbb{Z})$
  - Signaux "propres" $\{e_\omega[\cdot]\}_{\omega \in (-\pi, \pi]}$ avec $\|e_\omega\|_{\ell_\infty} = 1$: sinusoïdes complexes

    $\mathrm{S}_h\{e_\omega\} = \lambda_\omega \cdot e_\omega$ où $\lambda_\omega = H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \mathrm{S}_h\{e_\omega\}[0]$ (valeurs propres)
  - Transformation de Fourier: $\mathcal{F}_\mathrm{d} : f \mapsto F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \langle f, e_\omega \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f[k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega k}$
  - Diagonalisation: $\mathrm{S}_h = \mathcal{F}_\mathrm{d}^{-1}\Lambda_H\mathcal{F}_\mathrm{d}$ avec $\Lambda_H : F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) \mapsto H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) \cdot F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$

Conséquences pratiques: la réponse d'un système LID discret à une excitation sinusoïdale complexe est une sinusoïde complexe de même fréquence avec un facteur d'atténuation A et un déphasage θ qui dépendent de la fréquence. Grâce à cette propriété, la convolution peut se calculer par simple pondération (multiplication) dans le domaine de Fourier.

Lien avec la transformée de Fourier continue

Un signal discret $f[n]$ étant représentable par un signal continu

$$f[n] \xrightarrow{\text{représentation continue}} f_T(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f[n]\cdot\delta(t-nT)$$

on remarque que $F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}) = \mathcal{F}\{f_T\}(\omega)$.

En particulier, si $x(t)$ est un signal continu à **bande limitée** dans $\omega \in [-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$ et si $f[n] = x(nT)$ sont ses échantillons à la fréquence $1/T$, alors on sait (Shannon) que

$$x(t) = \mathrm{sinc}(t/T) * f_T(t).$$

D'où le lien entre la DTFT et la transformée de Fourier en temps continu

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x\}(\omega) = X(\omega) &= F\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}\right)\cdot T\mathrm{rect}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)\\ &= \begin{cases} T\cdot F\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}\right), & \text{si } \omega\in[-\frac{\pi}{T},\frac{\pi}{T}]\\ 0, & \text{sinon}\end{cases}\end{aligned}$$

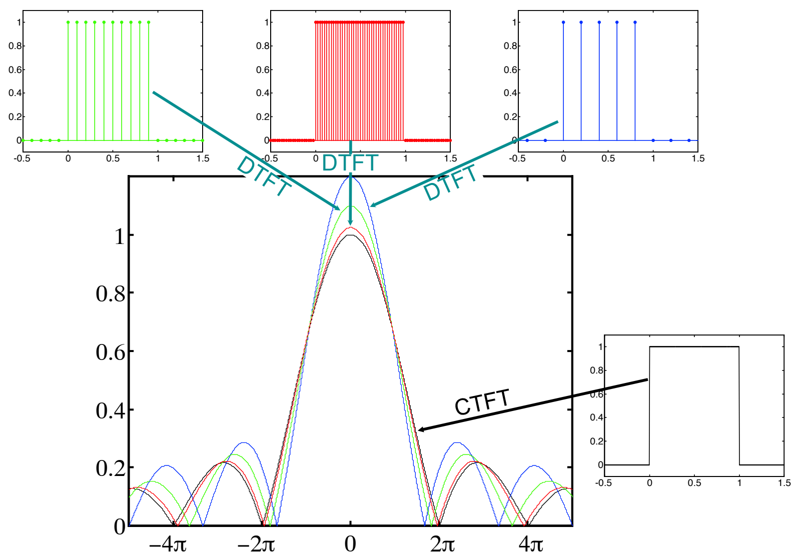
NB: $\sum_n \underbrace{x(t_n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_n}}_{f[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega nT}} \underbrace{\Delta t}_{T}$ est la somme de Riemann de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$.

De manière plus générale, on peut appliquer la formule de ***Poisson***: Si $f[n] = x(nT)$ sont les échantillons d'un signal à temps continu $x(t)$, alors

$$F\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{T}X\left(\frac{\omega}{T}\right) + \sum_{k\neq 0}\frac{1}{T}X\left(\frac{\omega-2\pi k}{T}\right)$$

ce qui montre que la DTFT est une **approximation de la transformée de Fourier** de la fonction $x(Tt)$.

Exemple: DTFT d'échantillons de la fonction $x(t) = \mathrm{rect}(t-\frac{1}{2})$ pour $T = 0.2, 0.1,$ et 0.25.



Propriétés de la DTFT

Relations de bases

Elles sont déduites de celles de la transformée en z.

- complexe conjugué: $\mathcal{F}_{\mathrm{d}}\{f^{*}\}(\omega) = \left(F(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\right)^{*}$
- renversement $f^{\vee}[n] \triangleq f[-n]$: $\mathcal{F}_{\mathrm{d}}\{f^{\vee}\}(\omega) = F(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}) = \left(F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right)^{\vee}$
- décalage: $\mathcal{F}_{\mathrm{d}}\{f[\cdot - n_0]\}(\omega) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n_0} F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}), \quad n_0 \in \mathbb{Z}$
- modulation: $\mathcal{F}_{\mathrm{d}}\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n} f[n]\}(\omega) = F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega-\omega_0)})$

Relation de symétrie

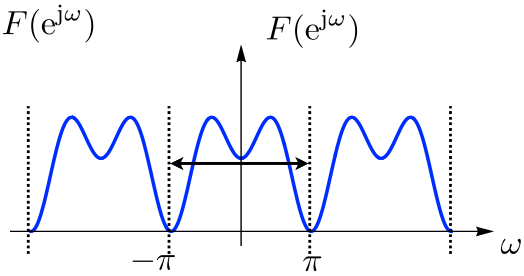
- symétrie Hermitienne: $f[n]$ réel $\Leftrightarrow \quad F(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}) = \left(F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right)^{*}$
- symétrie en n_0: $f[n] = f[n_0 - n] \quad \Leftrightarrow \quad F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n_0\omega} F(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}), \quad n_0 \in \mathbb{Z}$
- antisymétrie en n_0: $f[n] = -f[n_0 - n] \quad \Leftrightarrow \quad F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = -\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n_0\omega} F(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}), \quad n_0 \in \mathbb{Z}$

NB: les symétries sont importantes! Elle permettent de vérifier les calculs.

Périodicité de la DTFT

La DTFT est 2π-périodique

$$\forall \omega \in \mathbb{R}: \quad F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega+2\pi)}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f[k] \underbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega+2\pi)k}}_{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega k}} = F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$$



Série de Fourier de la DTFT

- Base orthonormale de Fourier pour l'interval $\omega \in [-\pi, \pi]$: $\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega}\}_{n\in\mathbb{Z}}$
- Produit scalaire: $\langle X, Y\rangle_{L_2([-\pi,\pi])} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} X(\omega)Y^{*}(\omega)\mathrm{d}\omega$
- Série de Fourier: $F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} \quad \Rightarrow \quad f[n] = c_{-n}$

En effet: $c_{-k} = \langle F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}), \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega}\rangle_{L_2([-\pi,\pi])} = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} f[n] \underbrace{\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega}\rangle_{L_2([-\pi,\pi])}}_{\delta[n-k]} = f[k]$

$\Leftrightarrow \quad f[n] = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega}\mathrm{d}\omega$ est le $n$ème coefficient de Fourier de $F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$.

Propriétés de la DTFT (suite)

- Stabilité: $f \in \ell_1(\mathbb{Z}) \quad \Rightarrow \quad F(e^{j\omega})$ bornée et continue.
- Inversion: $f[n] = \mathcal{F}_d^{-1}\{F(e^{j\omega})\}[n] \triangleq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\omega})e^{jn\omega}d\omega$
- Convolution: $\mathcal{F}_d\{f * g\}(\omega) = F(e^{j\omega}) \cdot G(e^{j\omega})$
- Multiplication: $\mathcal{F}_d\{f[n] \cdot g[n]\}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\xi}) \cdot G(e^{j(\omega-\xi)})d\xi$
- Parseval: $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f[n] \cdot g[n]^* = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\omega}) \cdot \left(G(e^{j\omega})\right)^* d\omega$
- Multiplication par n^k: $\mathcal{F}_d\left\{n^k f[n]\right\}(\omega) = (j)^k \frac{d^k}{d\omega^k}\left\{F(e^{j\omega})\right\}$
- Moment d'ordre k: $\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^k f[n] = (j)^k \left.\frac{d^k}{d\omega^k}\left\{F(e^{j\omega})\right\}\right|_{\omega=0}$

Transformation de Fourier et filtrage

L'effet d'un système LID, $\mathrm{S}_h : f \mapsto h * f$, se traduit par une multiplication de la DTFT du signal par $H(e^{j\omega})$ où certaines ***composantes spectrales*** sont amplifiées ou atténuées et, éventuellement, déphasées. On parle alors de ***filtrage***.

- Caractéristiques spectrales
  - $H(e^{j\omega}) = \mathcal{F}_d\{h\}(\omega)$: ***réponse fréquentielle*** du système (ou filtre discret).
  - Borne supérieure : $H_{\max} = \sup_{\omega\in[-\pi,+\pi]} \left|H(e^{j\omega})\right| < \infty$
  - Borne inférieure : $H_{\min} = \inf_{\omega\in[-\pi,+\pi]} \left|H(e^{j\omega})\right| \geq 0$
- Conséquence de la relation de Parseval
  - $\|h * f\|_{\ell_2}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|H(e^{j\omega})\right|^2 \left|F(e^{j\omega})\right|^2 d\omega$

$$\Rightarrow \quad H_{\min}^2 \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|F(e^{j\omega})\right|^2 d\omega\right) \leq \|h*f\|_{\ell_2}^2 \leq H_{\max}^2 \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|F(e^{j\omega})\right|^2 d\omega\right)$$

  - $\forall f \in \ell_2(\mathbb{Z}) : \quad H_{\min}\|f\|_{\ell_2} \leq \|h * f\|_{\ell_2} \leq H_{\max}\|f\|_{\ell_2}$

Stabilité au sense $\ell_2(\mathbb{Z})$ et filtrage inverse

Réponse fréquentielle: $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} = \mathcal{F}_{\mathrm{d}}\{h\}(\omega)$

telle que $\quad 0 < \quad H_{\min} \le \left|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right| \le H_{\max} \quad < +\infty$

Théorème

$\mathrm{S}_h : f \mapsto h * f$ est ℓ_2-stable $\quad \Leftrightarrow \quad H_{\max} < \infty.$

Spécifiquement, on a $\quad \forall f \in \ell_2(\mathbb{Z}) : \quad \|h * f\|_{\ell_2} \le H_{\max}\|f\|_{\ell_2}.$

NB: Condition moins restrictive que $h \in \ell_1(\mathbb{Z})$

Inverse de convolution

L'opérateur $\mathrm{S}_h : f \mapsto h * f$ avec $H_{\max} < \infty$ est **inversible** sur $\ell_2(\mathbb{Z})$ ***si et seulement si*** sa réponse fréquentielle est bornée en dessous (c.-à-d. $H_{\min} > 0$). Alors, $\mathrm{S}_h^{-1} : f \mapsto h_{\mathrm{inv}} * f$ avec

$$h_{\mathrm{inv}}[n] = \mathcal{F}_{\mathrm{d}}^{-1}\left\{\frac{1}{H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})}\right\}[n]$$

Conditionnement: $H_{\max}/H_{\min}$

Exemples de filtres

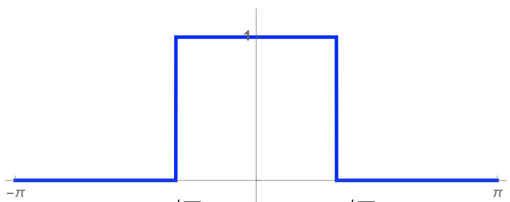
- Filtre passe-bas idéal discret
  - $h_{\mathrm{ideal}}[n] = \frac{1}{T}\mathrm{sinc}\left(\frac{n}{T}\right)$ avec $T \ge 1$
  - Formule de Poisson (périodisation):

    $H_{\mathrm{ideal}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \mathrm{rect}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$ pour $\omega \in [-\pi, +\pi]$
  - Bornes: $H_{\max} = 1, H_{\min} = 0$

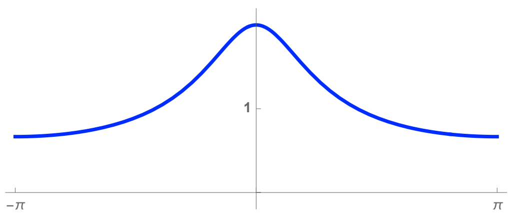
$\Longrightarrow$ Non-invertible

Rappel:

$\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad T\mathrm{rect}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$



- Filtre du premier ordre
  - $h_a[n] = a^n u[n]$ avec $|a| < 1$
  - $H_a(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \frac{1}{1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}$
  - Bornes: $H_{\max} = \frac{1}{1-|a|}, H_{\min} = \frac{1}{1+|a|} > 0$



$\Longrightarrow$ Invertible !

	Signal discret	DTFT (Fourier discret)
Définition	$f[n]$	$F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) \triangleq \sum_{n\in\mathbb{Z}} f[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$
Renversement	$\big(f[n]\big)^{\vee} = f[-n]$	$F(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}) = F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})^{\vee}$
Conjugué	$\big(f[n]\big)^*$	$\big(F(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\big)^*$
Décalage	$f[n-n_0]$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n_0}F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$
Modulation	$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}f[n]$	$F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega-\omega_0)})$
Mult. par monône	$n^k f[n]$	$\mathrm{j}^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\omega^k}F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$
Convolution	$(h*f)[n]$	$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$
Multiplication	$f[n]g[n]$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\xi})G(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega-\xi)})\mathrm{d}\xi$
Somme	$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f[n]$ $=$	$F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\big\vert_{\omega=0} = F(1)$
Parseval	$\langle f,g\rangle_{\ell_2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f[n]\big(g[n]\big)^*$ $=$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\big(G(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\big)^*\mathrm{d}\omega$

Signal discret	DTFT (Fourier discret)
$\frac{1}{2\pi}$	$\delta_{\text{perio}}(\omega) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta(\omega + 2\pi m)$
$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}, \quad \omega_0 \in \mathbb{R}$	$(2\pi)\delta_{\text{perio}}(\omega-\omega_0)$
$\cos(\omega_0 n)$	$\pi\left(\delta_{\text{perio}}(\omega+\omega_0) + \delta_{\text{perio}}(\omega-\omega_0)\right)$
$\sin(\omega_0 n)$	$\mathrm{j}\pi\left(\delta_{\text{perio}}(\omega+\omega_0) - \delta_{\text{perio}}(\omega-\omega_0)\right)$
$\delta[n-n_0], \quad n_0\in\mathbb{Z}$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n_0}$
$u[n] = \mathbb{1}_+[n] = \begin{cases} 1, & n\geq 0 \\ 0, & \text{sinon}\end{cases}$	$\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}} + \pi\delta_{\text{perio}}(\omega)$
$\mathbb{1}_{[-N\ldots N]}[n] = \begin{cases} 1, & \vert n\vert \leq N \\ 0, & \text{sinon}\end{cases}$	$\frac{\sin\frac{(2N+1)\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}$
$\mathrm{e}^{\alpha n}u[n], \quad \mathrm{Re}(\alpha) < 0$	$\frac{1}{1-\mathrm{e}^{\alpha-\mathrm{j}\omega}}$
$\frac{(n+N-1)!}{n!\,(N-1)!}\,\mathrm{e}^{\alpha n}u[n], \quad \mathrm{Re}(\alpha)<0$	$\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{\alpha-\mathrm{j}\omega}}\right)^N$

10.2 LA TRANSFORMÉE DE FOURIER DISCRÈTE

- Définition de la DFT
- Lien avec la transformée de Fourier
- Lien avec la DTFT
- Inversion de la DFT
- Ré-échantillonnage de la DTFT
- Propriétés de la DFT

Convention implicite

Signal discret N-**périodique** $f_N[n] = f_N[n + kN], \ \forall n, k \in \mathbb{Z}$

Définition de la DFT

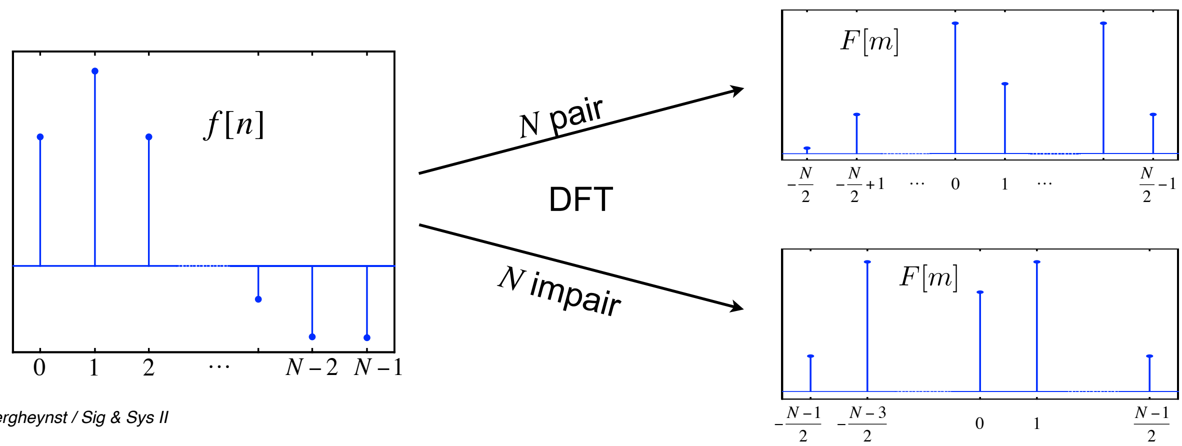
important!

À partir d'une suite discrète ***N-périodique*** $f[n] = f_N[n]$, on construit une nouvelle suite également N-périodique $F[m]$ appelée ***transformée de Fourier discrète*** (DFT) de $f[n]$

$$\mathbf{DFT}\{f\}[m] \overset{\text{notation}}{=} F[m] \triangleq \sum_{n=0}^{N-1} f[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\frac{2\pi}{N}n}$$

Remarque: il s'agit d'une ***transformation linéaire en dimension finie*** qui prend un vecteur $\mathbf{f} = (f[n])_{n=0}^{N-1} \in \mathbb{C}^N$ et lui associe un autre vecteur complexe $\mathbf{F} = (F[m])_{m=0}^{N-1} \in \mathbb{C}^N$.

Representation matricielle : $\mathbf{F} = \mathbf{A}_{\mathrm{DFT}}\mathbf{f}$ où $\mathbf{A}_{\mathrm{DFT}} \in \mathbb{C}^{N\times N}$ avec $[\mathbf{A}_{\mathrm{DFT}}]_{m,n} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\frac{2\pi}{N}n}$



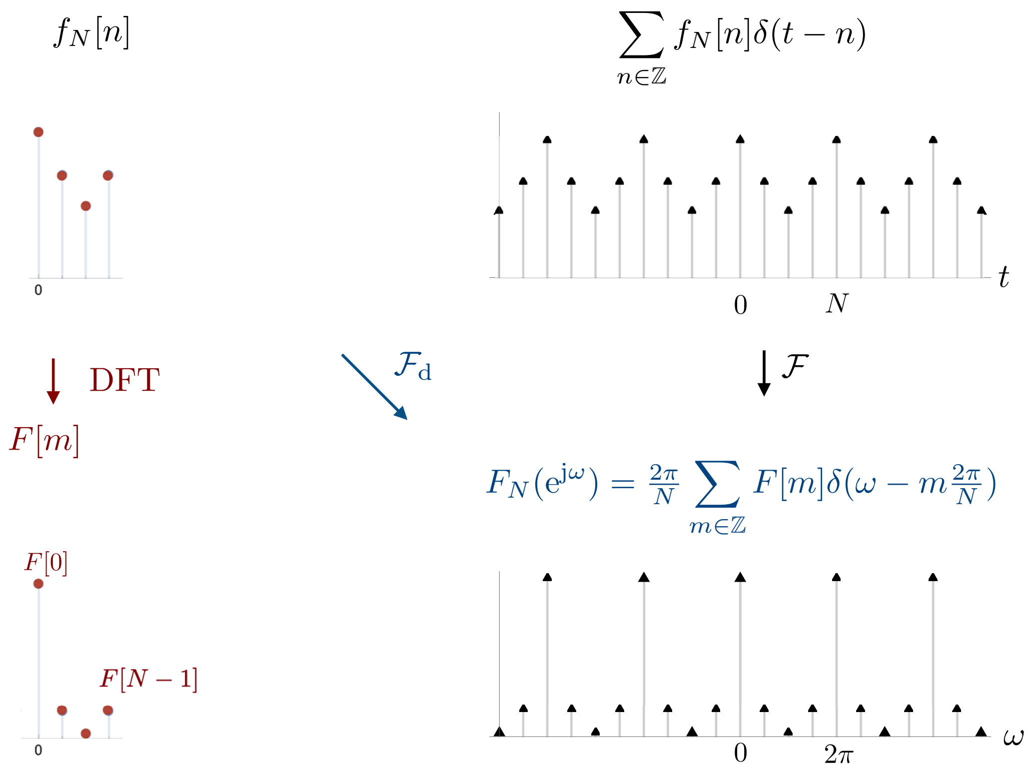
Lien avec la transformée de Fourier

Calculons la ***transformée de Fourier*** (à temps continu) du signal continu représentant le signal N**-périodique** discret $f_N[n]$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\Big\{\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_N[n]\delta(t-n)\Big\}(\omega) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_N[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} \\
&= \sum_{n_0=0}^{N-1}\sum_{n_1\in\mathbb{Z}} f_N[n_0+n_1N]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(n_0+n_1N)} && n = n_0 + n_1 N \\
&= \sum_{n_0=0}^{N-1} f_N[n_0]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n_0} \sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n_1 N} && (N\text{-périodicité de } f_N) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} f_N[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}\left(\frac{2\pi}{N}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\delta\Big(\omega - m\frac{2\pi}{N}\Big)\right) && \text{(Formule de Poisson)} \\
&= \frac{2\pi}{N}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{N-1} f_N[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\frac{2\pi}{N}n}\right)}_{F[m]} \cdot \delta\Big(\omega - m\frac{2\pi}{N}\Big) && \text{(Multiplication par δ)}
\end{aligned}$$

Il s'agit d'un ***train de Diracs*** aux fréquences $\omega_m = \frac{m2\pi}{N}$ dont l'amplitude est donnée par la DFT de $f_N[n]$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_N[n]\delta(t-n) \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{2\pi}{N}\sum_{m\in\mathbb{Z}} F[m]\delta\Big(\omega - m\frac{2\pi}{N}\Big)$$



Lien avec la DTFT

La version N-**périodisée** d'un signal $f[\cdot] \in \ell_1(\mathbb{Z})$ est définie par

$$f_N[n] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f[n+kN], \quad \text{avec } f_N[\cdot] \in \ell_\infty(\mathbb{Z}).$$

Échantillonnons $F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \mathcal{F}_{\mathrm{d}}\{f\}(\omega)$ aux fréquences $\omega_m = m\frac{2\pi}{N}$

$$F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_m}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f[k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\frac{2\pi}{N}k} \qquad \color{darkred}{k = n + n_1 N}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{\sum_{n_1\in\mathbb{Z}} f[n+n_1 N]}_{f_N[n]}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\frac{2\pi}{N}n_0}\, \underbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}m2\pi n}}_{1} = F_N[m]$$

Donc, les **échantillons** de la **DTFT** d'un signal discret $f[n]$ sont la **DFT** de sa version N-**périodisée** $f_N[n]$ (aliasée en général).

En particulier: si $f[\cdot]$ est à support fini dans $[0\ldots N-1]$, $f_N[\cdot]$ et $f[\cdot]$ coïncident sur ce support; dans ce cas, $f_N[\cdot]$ n'est pas aliasée.

Inversion de la DFT

Grâce au lien entre la DFT et la transformée de Fourier à temps continu, on a

$$f[n] = \mathbf{DFT}^{-1}\{F\}[n] = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} F[m]\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\frac{2\pi}{N}m}$$

Vérification directe:

$$\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} F[m]\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\frac{2\pi}{N}m} = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\left(\sum_{k=0}^{N-1} f[k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\frac{2\pi}{N}k}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\frac{2\pi}{N}m}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} f[k]\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\frac{2\pi}{N}(n-k)}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f[k]\underbrace{\sum_{m=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\frac{2\pi}{N}(n-k)}}_{N\delta[n-k]} = f[n]$$

Remarquer la relation de **dualité**

$$\mathbf{DFT}\big\{\mathbf{DFT}\{f\}\big\}[n] = N f[-n]$$

Propriétés de la DFT

Opération	Signal discret	**DFT**
N-périodicité	$f[n+N]=f[n]$	$F[m+N]=F[m]$
Décalage	$f[n-n_0]$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\frac{2\pi}{N}m)n_0}\cdot F[m]$
Retournement	$f[-n]$	$F[-m]$
Modulation	$\mathrm{e}^{\mathrm{j}m_0\frac{2\pi}{N}n}\cdot f[n]$	$F[m-m_0]$
Conjugaison	$f[n]^*$	$F[-m]^*$
Dualité	$F[n]$	$N\cdot f[-m]$
Convolution cyclique	$\sum_{k=0}^{N-1} f[k]\cdot g[n-k]$	$F[m]\cdot G[m]$
Multiplication	$f[n]\cdot g[n]$	$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F[k]\cdot G[m-k]$

- Relation de Parseval: $$\sum_{n=0}^{N-1} f[n]\cdot g[n]^* = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} F[m]\cdot G[m]^*$$

Ré-échantillonnage de la DTFT

Il est souvent nécessaire de calculer la DTFT d'un signal discret non-périodique en d'autres échantillons fréquentiels que $\omega_m = m\frac{2\pi}{N}$.

On suppose que le support de $f[n]$ est $[0\dots N-1]$.

Il y a alors deux possibilités:

- Soit exprimer la DTFT directement à l'aide de ses échantillons $F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_m}) = F[m]$ en utilisant la formule d'***interpolation***

$$F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} f[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} F[m]\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\frac{2\pi}{N}m}}_{\mathbf{DFT}^{-1}\{F[m]\}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} = \sum_{m=0}^{N-1} \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\omega-\frac{2\pi}{N}m\right)n}}_{D_N(\omega-\omega_m)} F[m]$$

noyau de Dirichlet

$$= \sum_{m=0}^{N-1} D_N\left(\omega - m\frac{2\pi}{N}\right)F[m] \longleftarrow \text{Version discrète de la formule de Shannon}$$

- Soit choisir une taille de périodisation N plus grande ("zero padding").

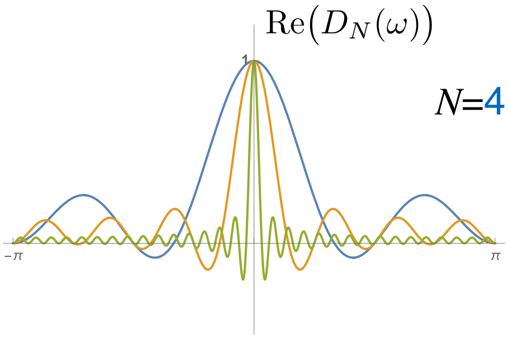
Noyau de Dirichlet = sinc périodisé

Fenêtre de moyennage causale: $h_N[n] = \frac{1}{N}\mathbb{1}_{[0\dots N-1]}[n]$

Rappel: $\sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$

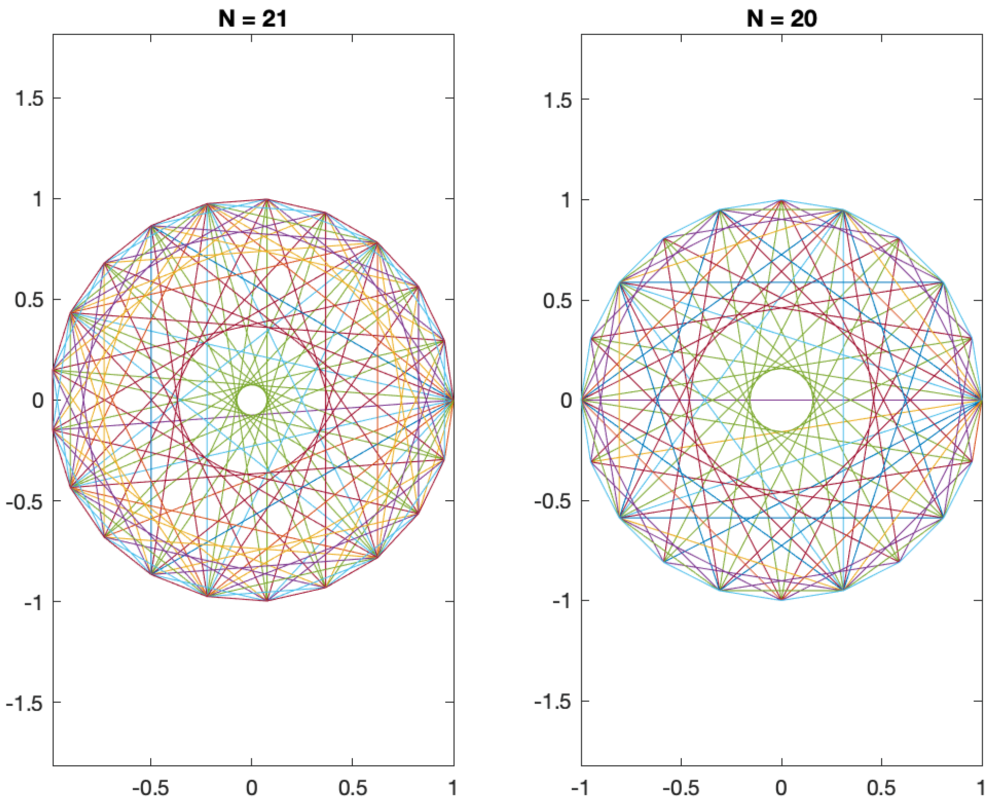
Noyau de Dirichlet: $D_N(\omega) = \mathcal{F}_{\mathrm{d}}\{h_N\}(\omega) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} = \begin{cases} \frac{1}{N}\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega N}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}, & \omega \neq 2\pi k \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$

C'est une fonction 2π-périodique



DFT et racines de l'unité

$\mathbf{F} = \mathbf{A}_{\mathrm{DFT}}\mathbf{f}$ où $\mathbf{A}_{\mathrm{DFT}} \in \mathbb{C}^{N\times N}$ avec $[\mathbf{A}_{\mathrm{DFT}}]_{m,n} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\frac{2\pi}{N}n} = W_N^{mn}$, $m,n \in \{0,\dots,N-1\}$



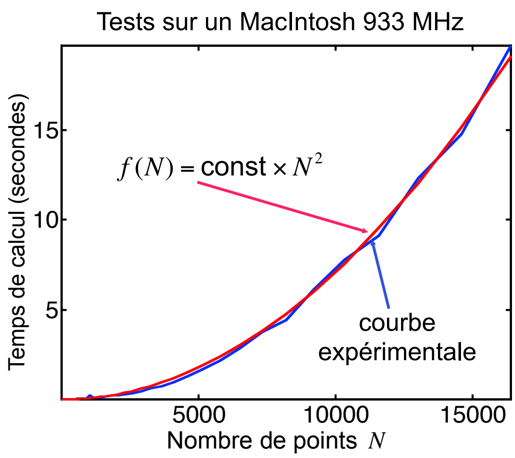
Notation:
$W_N = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}}$

10.3 LA TRANSFORMÉE DE FOURIER RAPIDE (FFT)

- Coût d'implémentation de la DFT
- Grandes lignes de l'algorithme rapide (FFT)
- L'algorithme dyadique
- Représentation graphique
- Coût de l'algorithme dyadique
- Cas de données réelles

Coût d'implémentation de la DFT

Calculer une DFT sur N points nécessite a priori N multiplications complexes (cas de données complexes) et $N-1$ additions complexes par fréquence $\rightarrow$ environ $8N^2$ opérations réelles au total.



Le coût de calcul devient vite trop important (en particulier pour le traitement d'images) $\rightarrow$ nécessité d'un algorithme ***rapide*** (Cooley et Tuckey en 1965).

Grandes lignes de l'algorithme rapide (FFT)

Pour accélérer les calculs, il faut remarquer que, si N peut se factoriser sous la forme $N = p \cdot q$, alors on peut diviser la somme de la DFT

$$F[m] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \cdot W_N^{mn} \qquad \text{où } W_N = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}}$$

en sous-sommes qui sont autant de DFT plus petites (méthode de la ***décimation temporelle***):

$W_N^{mn_1 p}$

$$F[m] = \sum_{n_0=0}^{p-1} \sum_{n_1=0}^{q-1} f[n_0 + n_1 p] \cdot W_N^{m(n_0+n_1 p)} = \sum_{n_0=0}^{p-1} W_N^{mn_0} \underbrace{\sum_{n_1=0}^{q-1} f[n_0 + n_1 p] \cdot W_q^{mn_1}}_{\mathbf{DFT}\text{ sur } q=N/p \text{ points}}$$

Si $C(N) < \alpha \cdot N^2$ est le coût d'une DFT sur N points, on peut obtenir avec cette technique

$$C(N) = p \cdot C(q) + p \cdot N$$

Or $C(q) \leq \alpha \cdot (N/p)^2$, d'où

$$C(N) \leq \alpha \cdot N^2 (1/p + p/(\alpha N)) \underset{N \text{ grand}}{\approx} (\alpha \cdot N^2)/p \ll \alpha \cdot N^2$$

qui indique un gain (asymptotique) d'un facteur p.

L'algorithme dyadique

Le cas le plus simple apparaît pour $N = 2q$. Dans ce cas, la méthode de la décimation temporelle avec $p = 2$ et $q = N/2$ donne

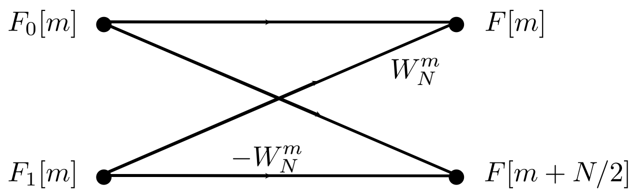
$$F[m] = \underbrace{\sum_{n_1=0}^{N/2-1} f[2n_1] \cdot W_{N/2}^{mn_1}}_{F_0[m]} + W_N^m \cdot \underbrace{\sum_{n_1=0}^{N/2-1} f[2n_1+1] \cdot W_{N/2}^{mn_1}}_{F_1[m]}$$

Puis, on observe que $F_0[m + N/2] = F_0[m]$ et $F_1[m + N/2] = F_1[m]$ (périodicité de la DFT) d'où la division des fréquences en deux ensembles: $0, 1, \ldots, (N/2-1)$ et $N/2, (N/2+1), \ldots, (N-1)$

$$\begin{aligned} F[m] &= F_0[m] + W_N^m \cdot F_1[m] \\ F[m+N/2] &= F_0[m] - W_N^m \cdot F_1[m] \end{aligned} \qquad \text{pour } m = 0, 1, \cdots (N/2-1)$$

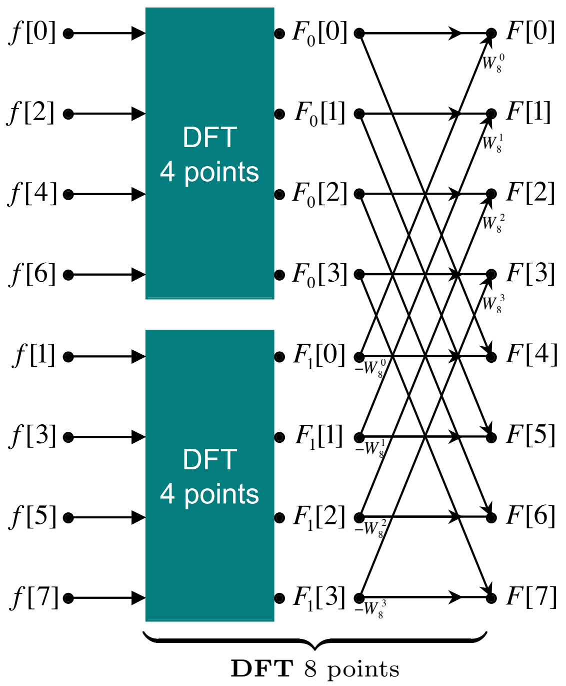
Représentation graphique, le ***papillon***:

NB: $W_N^{m+N/2} = W_N^m W_N^{N/2} = -W_N^m$

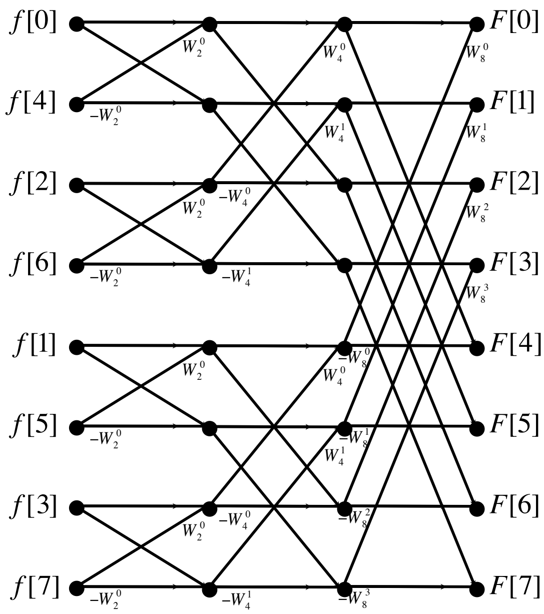


Représentation graphique

Une itération de l'algorithme de FFT



Toutes les itérations



Coût de l'algorithme dyadique

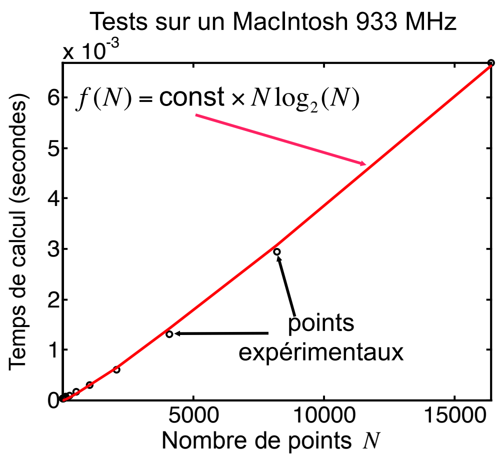
Le coût d'un papillon est de deux additions complexes et d'une multiplication et pour chacune des $N/2$ fréquences calculées.

Donc, si $C_{\text{add}}(M)$ et $C_{\text{mult}}(M)$ sont le coût en additions et multiplications complexes d'une FFT sur $N = 2^M$ points, on peut écrire

$$\begin{array}{l} C_{\text{add}}(M) = 2 \cdot 2^{M-1} + 2 \cdot C_{\text{add}}(M-1) \\ C_{\text{mult}}(M) = 1 \cdot 2^{M-1} + 2 \cdot C_{\text{mult}}(M-1) \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} C_{\text{add}}(M) = M \cdot 2^M = N \log_2(N) \\ C_{\text{mult}}(M) = 2^{M-1}(M-1) = \frac{N}{2}\log_2(\frac{N}{2}) \end{array}$$

Le coût de l'algorithme FFT dyadique est proportionnel à $N\log_2(N)$.

En particulier, plus N est grand, plus $N\log_2(N) << N^2$ (coût de la DFT).



Fonction MatLab correspondante:
`G = FFT(F)`
Calcule la DFT du vecteur de données
`F=[F(1) F(2)... F(N)]` pour `N` arbitraire
en utilisant un algorithme de FFT.
Note: implémentation *très* optimisée!

Cas de données réelles

Soient deux signaux discrets réels $f[n]$ et $g[n]$ de taille N dont on désire calculer la FFT. On construit le signal complexe $h[n] = f[n] + \mathrm{j} \cdot g[n]$ dont la DFT est $H[m]$ (calculée en $O(N \log_2 N)$ opérations par l'algorithme de FFT).
Comment retrouver $F[m]$ et $G[m]$ à partir de $H[m]$?

- Solution
  - linéarité de la DFT: $H[m] = F[m] + \mathrm{j} \cdot G[m]$
  - symétrie Hermitienne de $F[m]$ et $G[m]$

$$\Rightarrow H[-m]^* = \big(F[-m] + \mathrm{j} \cdot G[-m]\big)^* = F[m] - \mathrm{j} \cdot G[m]$$

d'où, par résolution, $F[m] = \frac{H[m]+H[-m]^*}{2}$ et $G[m] = \frac{H[m]-H[-m]^*}{2\mathrm{j}}$.

$\Rightarrow$ 2 FFT réelles pour le prix d'une FFT complexe (et quelques additions)!

Remarque: une idée similaire peut être appliquée pour calculer la DFT d'un signal réel de taille $2N$ à l'aide d'une FFT complexe de taille N: choisir $h[n] = f[2n] + \mathrm{j} \cdot f[2n+1]$.